Vorkurs Physik, WS22/23

Übungszettel 7

Prof. Dr. Berenike Maier, Prof. Dr. Andreas Schadschneider
Universität zu Köln

7.1 Lineare Abhängigkeit

Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} .. \vec{a_n}$ sind linear abhängig, wenn eine Linearkombination mit Vorfaktoren λ_j aus ihnen den Nullvektor ergibt, ohne dass alle $\lambda_j = 0$ sind. Mathematisch geschrieben:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a_j} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \exists j : \lambda_j \neq 0 \tag{1}$$

a) Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i) Zeigen Sie mit einer Skizze, dass eine Kombination aus den Vektoren wieder zum Koordinatenursprung zurückführt.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (1), dass die Vektoren linear abhängig sind.

iii) Welche der gegebenen Vektoren bilden zusammen eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

b) Zeigen Sie nun im $\mathbb{R}^3$, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn Gleichung (1) nur für $\lambda_j = 0$ gilt.
Zeigen Sie, dass dies für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ der Fall ist.

7.2 Krummlinige Koordinaten

Gegeben ist der Ortsvektor $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$. Wie lauten zu diesem Vektor die

a) kartesischen Koordinaten,

b) Koeffizienten r, φ, ϑ in Kugelkoordinaten (siehe Skizze)?

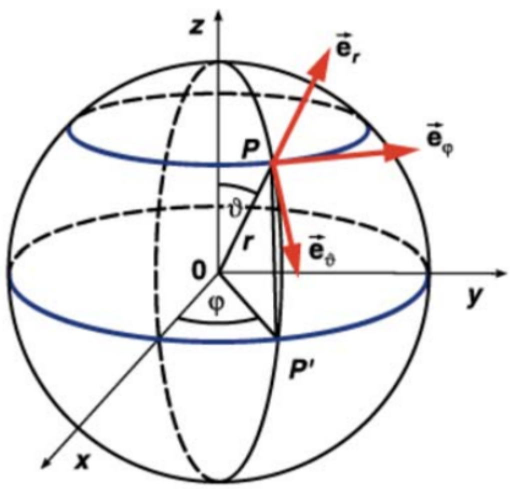

Fig. 1: Kugelkoordinaten

7.3 Skalarprodukt in krummlinigen Koordinaten

Gegeben sind zwei Vektoren in Kugelkoordinaten als $(r_1, \varphi_1, \vartheta_1)$ bzw. $(r_2, \varphi_2, \vartheta_2)$.

a) Was ist ihr Skalarprodukt?

b) Was gilt für den Betrag der Vektoren?

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.
(Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die kartesischen Komponenten)