Vorkurs Physik, WS22/23

Übungszettel 5

Prof. Dr. Berenike Maier, Prof. Dr. Andreas Schadschneider
Universität zu Köln

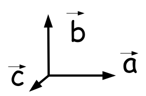
5.1 Vektorprodukt - Rechenregeln

a) Vereinfachen Sie $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot [(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{c})]$.

b) Formen Sie den Ausdruck für den Vektor $\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$ auf zwei Weisen um, indem Sie die *bac-cab* - Regel zunächst auf die ersten beiden, oder alternativ auf die letzten beiden Kreuzprodukte anwenden!
Wie ist $\vec{v}$ orientiert? Was passiert, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$ oder $\vec{a} \perp \vec{b}$?

5.2 Vektorprodukt

a) Gegeben seien Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (siehe Skizze), die in der Zeichenebene liegen. Vektor $\vec{c}$ zeigt aus dieser heraus. Jeder Vektor hat die Länge 1 und zwischen den Vektoren liegen rechte Winkel.



Ermitteln Sie das Ergebnis der folgenden Vektorausdrücke:
i) $\vec{a}\times\vec{b}$ ii) $\vec{b}\times\vec{a}$ iii) $\vec{c}\times\vec{a}$ iv) $\vec{c}\times\vec{c}$ v) $\vec{c}\times(\vec{b}+\vec{a})$ vi) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{a})$

b) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis B. Bestimmen Sie $\vec{p} \times \vec{q}$, $\vec{q} \times \vec{p}$ und $\vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{q})$ (was bedeutet das?). Wie groß ist die Fläche eines von $\vec{p}$ und $\vec{q}$ aufgespanntes Parallelograms?

c) Zwei Vektoren der Längen 2 und 3 schließen den Winkel $\frac{\pi}{6}(= 30^\circ)$ ein. Wie lang ist ihr Vektorprodukt?