Vorkurs Physik: Übung 11

Wintersemester 2022/23

1. Trigonometrische Funktionen

a) Rechnen Sie um!

ins Bogenmass: 1) 30°, 2) 90°, 3) 270°, 4) 72°

in Grad: 5) $\frac{\pi}{3}$, 6) $\frac{3\pi}{2}$, 7) $\frac{\pi}{4}$, 8) $1,79$.

b) Skizziere den Verlauf der Funktion $y(x) = 3\sin(2x - 1)$.

c) Bestimme die Periode der folgenden Funktionen:

$$1) \quad 3\sin\left(3x + \frac{1}{4}\right), \qquad 2) \quad \cos(4\pi x)\,.$$

d) Wie lautet die Gleichung der Sinuskurve mit der Amplitude 4 und der Periode $\frac{\pi}{2}$?

2. Trigonometrische Funktionen II

a) Vereinfache folgende Ausdrücke:

$$1) \quad \cos^2\varphi \cdot \tan^2\varphi + \cos^2\varphi \qquad 2) \quad 1 - \frac{1}{\cos^2\varphi} \qquad 3) \quad \frac{1}{1-\sin\varphi} + \frac{1}{1+\sin\varphi}$$

b) Zeigen Sie

1. $\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$ bzw. $\cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1$,
2. $\sin\phi_1 + \sin\phi_2 = 2\,\sin\frac{(\phi_1+\phi_2)}{2}\,\cos\frac{(\phi_1-\phi_2)}{2}$.

Dabei dürfen Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \pm \cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2\,, \\ \cos(\phi_1 \pm \phi_2) &= \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \mp \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \end{aligned}$$

verwenden.

3. Rechenregeln für Logarithmen

a) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ bzw. $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$:

$$\begin{array}{ll} 1) & \ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B) \\ 2) & \ln\left(\dfrac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B) \\ 3) & \ln(A^m) = m \cdot \ln(A) \end{array}$$

b) Zeigen Sie die für einen Basiswechsel des Logarithmus gültige Gleichung

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

4. Zusatzaufgabe: Hyperbolische Umkehrfunktion

Zeigen Sie, dass sich die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} x$ (*Areasinus Hyperbolicus*) von $\sinh x$ folgendermaßen mit Hilfe des Logarithmus darstellen lässt:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) .$$