3. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Sommersemester 2015 `http://ukoeln.de/CBSXB`

1. Komplexe Zahlen

a) Wie lauten der Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ der folgenden komplexen Zahlen?

i) $3 + 5\imath$ ii) $\dfrac{6 + 9\imath}{12}$ iii) $(4 + 2\imath) \cdot (3 - \imath)$

iv) $(3 + 2\imath)^2$ v) $(2 + 2\imath)^2 + (2 - 2\imath)^2$ vi) $\dfrac{3}{4 + 6\imath}$

b) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z allgemein wie folgt erhalten werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2\imath}$$

c) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + \imath y_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass gilt:

i) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$ ii) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$ iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

d) Eine komplexe Zahl z kann sowohl in kartesischer Form mit $z = x + \imath y$ als auch in Polarform mit $z = r\, e^{\imath\phi}$ dargestellt werden. Zeigen Sie, dass für die Umrechnung von kartesischer Form in Polarform gilt (solange $x > 0$):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

e) Wie lautet die Umrechnung von Polarform in kartesische Form?

f) Berechnen Sie:

i) $\sqrt{-4}$ ii) $\sqrt{3 + 4\imath}$ iii) $\sqrt[5]{-1}$

g) Finden Sie alle Lösungen für

$$x^3 = -8$$

und geben Sie diese in kartesischer Form und Polarform an.

2. Hyperbolische Funktionen

Analog zu den Exponentialfunktion der trigonometrischen Funktionen lassen sich die sogenannten hyperbolischen Funktionen definieren als

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen die folgenden Beziehungen:

i) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ und $\cosh(-x) = \cosh(x)$

ii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

iii) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x)$

iv) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$

3. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen nach x der folgenden Funktionen:

a) $x^2 \ln(x)$	b) $\dfrac{x^2+3}{x-5}$	c) $\sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$	d) $\sqrt{3x^2+2x-1}$
e) $\sin(x)\cos(x)$	f) $e^{x\sin(x)}$	g) a^x	h) $\cosh(x)$